MAI 3 1. cvičení - metrické prostory 1

Co jsme řešili na prvním cvičení a problémky k promyšlení pro příští cvičení :

1. Ukázali jsme, že z axiomů v definici metriky plyne nezápornost metriky.

2. Připomněli jsme prostory R^n a v nich metriky $d_p(x,y), p \in N$ a $d_\infty(x,y)$.
   Ověřili jsme axiomy metrik $d_1(x,y)$ a $d_\infty(x,y)$.
   Pokusili jsme se o důkaz tvrzení (úloha z 1. přednášky) $\lim\limits_{p\to\infty} d_p(x,y) = d_\infty(x,y)$. Našli jsme zatím (pro užití věty o limitě sevřené posloupnosti) „strážníka shora“ (zde prosím, omluvte, že jsem při opakování limity $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ $(= \lim\limits_{n\to\infty} e^{n^{-1}\ln n})$ zapomněla (asi, jak se mi zdá) napsat -1 v n^{-1}). Zkuste důkaz dokončit (případně vymyslete důkaz jiný).

3. V prostoru $C[a,b]$ jsme připomněli metriky $d(f,g) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ a $d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$
   a ověřili axiomy metrik $d(f,g)$ a $d_1(f,g)$ (u ověření axiomů u $d_1(f,g)$ jsme potřebovali některé vlastnosti určitého integrálu).

4. Pokud se v prostoru $R[a,b]$ pokusíme a zavedení metriky $d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$, který axiom metriky nebude splněn? Umíte „upravit“ prostor $R[a,b]$ tak, aby $d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ byla už metrika?

5. Užitím Cauchyovy – Schwarzovy nerovnosti (viz úloha 6. z první přednášky MAI 3 pana docenta Klazara) odvoďte trojúhelníkovou nerovnost pro euklidovskou metriku v R^n. A zkuste dokázat i Cauchyovu – Schwarzovu nerovnost. (A třeba ještě zkuste najít tzv. Hölderovu nerovnost a dokázat pak trojúhelníkovou nerovnost i pro metriku $d_p(x,y), p \in N$, $p \geq 3$.)

6. Zkuste dokázat , že v lineárním prostoru V se skalárním součinem $\langle u,v \rangle$ a normou $\|u\| = \sqrt{\langle u,v \rangle}$ platí $|\langle u,v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (Schwarzova nerovnost) a dále pak ověřit platnost axiomů metriky, pokud v prostoru V definujeme metriku $d(u,v) = \|u - v\|$.

   Příklady : prostor R^n s euklidovskou metrikou, prostor $C[a,b]$ s metrikou $d_2(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}$.